TURKISH JOURNAL OF SCIENCE
VOLUME III, ISSUE I, 14-31
ISSN: 2587-0971

http://dergipark.gov.tr/tjos

Türevlenebilen Geometrik Konveks Fonksiyonlar için Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler*

Hadamard Type Integral Inequalities for Differentiable Geometrically Convex Functions*

Nurullah KILIÇ[1] and Ahmet Ocak AKDEMİR[2*]

[1]*Ministery of National Education, Ağrı, Turkey*
[2]*Ağrı İbrahim Çeçen University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, Ağrı, Turkey*
Sorumlu yazar / Corresponding Author:* **aocakakdemir@gmail.com

Geliş Tarihi / Received Date: 23 August 2018
Kabul Tarihi / Accepted Date: 29 December 2018

*Bu çalışma "Geometrik konveks fonksiyonlar üzerine bazı integral eşitsizlikler" başlıklı (Nurullah KILIÇ, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2016) yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Öz: Bu çalışmada öncelikle iki integral eşitsizliği elde edilmiş ve bu iki eşitlik yardımıyla türevlenebilen geometrik konveks fonksiyonlar için bazı Hadamard tipli integral eşitsizlikler ispat edilmiştir. Ayrıca elde edilen bulgulara ait bazı uygulamalar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler — Hadamard Eşitsizliği, Geometrik konvekslik, Hölder Eşitsizliği.

Abstract: In this study, firstly two integral identity have been obtained and some Hadamard type integral inequalities have been proved for geometrically convex functions by using these two integral identities. Also, some applications related to findings have been given.

Keywords — Hadamard Inequality, Geometrically convexity, Hölder inequality.

---

1. GİRİŞ

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve literatürde mevcut bazı teoremler verilecektir.

Tanım 1.1. (Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 1.2. (Harmonik Konveks Fonksiyon) I$\subset R/\{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \to R$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I\ ve\ \alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{\alpha x+(1-\alpha)y}\right) \leq \alpha f(y)+(1-\alpha)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (Anderson *et al.* 2007).

Tanım 1.3. (Ortalama Fonksiyonu) M fonksiyonu $M:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

(1) $M(x,y) = M(y,x)$

(2) $M(x,x) = x$

(3) $x < M(x,y) < y\,, x < y$

(4) $M(ax,ay) = aM(x,y),\ a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir (Anderson *et al.* 2007).

Tanım 1.4. (MN- Konveks (Konkav) fonksiyon): $f: I \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin.$I \subseteq (0,\infty)$ve M,N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y\epsilon\ I$ için

$$f\big(M(x,y)\big) \leq (\geq) N\big(f(x),f(y)\big)$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna MN $-$konveks(konkav) fonksiyonu denir (Anderson 2007).

Teorem 1.1. $I \subseteq (0,\infty)$ ve $f: I \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin.(4)-(9) seçenekleri için $I = (0,b), 0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA $-$konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f nin konveks (konkav) olmasıdır.

(2) f nin AG $-$konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $logf$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(3) f nin AH $-$konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart ${}^{1}\!/_{f}$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(4) f nin GA $-$konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin$(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(5) f nin GG $-$konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(6) f nin GH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/_{f(be^{-t})}$nin$(0,\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(7) f nin HA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f\left(1/_{x}\right)$ nin $(1/_{b},\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(8) f nin HG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $logf\left(1/_{x}\right)$ nin $(1/_{b},\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(9) f nin HH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/_{f\left(1/_{x}\right)}$ nin $(1/_{b},\infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır (Anderson 2007).

Teorem 1.2. $I\subseteq(0,\infty)$ ve $f:I\to(0,\infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I=(0,b)$,$0<b<\infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f^{'}(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(2) f nin AG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f^{'}(x)/_{f(x)}$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(3) f nin AH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f^{'}(x)/_{f(x)^2}$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(4) f nin GA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(5) f nin GG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf^{'}(x)/_{f(x)}$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(6) f nin GH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(7) f nin HA −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2 f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(8) f nin HG −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2 f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(9) f nin HH −konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2 f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır (Anderson 2007).

Teorem 1.3. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$\left|f'(x)\right|^q$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise$q \geq 1$ için;

$$\left|[bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{[(b-a)A(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}}} \{[L(a^2,b^2) - a^2]|f'(a)|^q + [b^2 - L(a^2,b^2)]|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et. al.* 2013).

Teorem 1.4. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$\left|f'(x)\right|^q$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise $q > 1$ için;

$$\left|[bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx\right| \leq (lnb - lna)[L\left(a^{\frac{2q}{(q-1)}}, b^{\frac{2q}{(q-1)}}\right)]^{1-\frac{1}{q}} [A\left|f'(a)\right|^q \left|f'(b)\right|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et. al.* 2013).

Teorem 1.5. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$\left|f'(x)\right|^q$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{(2q)^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{\frac{2q}{q-1}},b^{\frac{2q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\{[L(a^{2q},b^{2q})-a^{2q}]|f'(a)|^{q}+[b^{2q}-L(a^{2q},b^{2q})]|f'(b)|^{q}\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang *et. al.* 2013).

Teorem 1.6. $f: I\subseteq\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a,b\in I^{o}$, $a<b$, $f'\epsilon L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise bu takdirde

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_{a}^{b}f(u)du\right|$$

$$\leq\left(\frac{L(x^{2},b^{2})-L(a^{2},x^{2})}{2}\right)|f'(x)|+\left(\frac{L(a^{2},x^{2})-a^{2}}{2}\right)|f'(a)|+\left(\frac{b^{2}-L(x^{2},b^{2})}{2}\right)|f'(b)|$$

eşitsizliği $\forall x\in[a,b]$ için geçerlidir (Avcı-Ardıç *et. al.* 2015).

Teorem 1.7. $f: I\subseteq\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a,b\in I^{o}$, $a<b$, $f'\epsilon L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|^{q}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise bu takdirde

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_{a}^{b}f(u)du\right|$$

$$\leq(lnx-lna)^{1-\frac{1}{q}}(L(a^{2},x^{2})-x^{2})^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(a)|^{q}-|f'(x)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnb-lnx)^{1-\frac{1}{q}}(L(b^{2},x^{2})-b^{2})^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(b)|^{q}-|f'(x)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\forall x\in[a,b]$ ve $q\geq 1$ için geçerlidir (Avcı-Ardıç *et. al.* 2015).

Teorem 1.8. $f: I\subseteq\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a,b\in I^{o}$, $a<b$, $f'\epsilon L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f'(x)\right|^{q}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında GA −konveks ise bu taktirde

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_{a}^{b}f(u)du\right|$$

$$\leq (lnx - lna)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}} - a^{\frac{2q}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(lnb - lnx)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{\frac{2q}{q-1}} - x^{\frac{2q}{q-1}}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(b)|^q + |f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a,b]$ ve $q > 1$ için geçerlidir (Avcı-Ardıç *et. al.* 2015).

Teorem 1.9. $f: I \subseteq \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$ harmonik fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $f \in L[a,b]$ ise bu durumda

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (İşcan 2014).

Teorem 1.10. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında harmonik konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \leq \frac{ab(b-a)}{2} \lambda_1^{1-\frac{1}{q}} [\lambda_2|f'(a)|^q + \lambda_3|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\lambda_1 = \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} ln\frac{(a+b)^2}{4ab}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1}{b(b-a)} + \frac{3a+b}{(b-a)^3} ln\frac{(a+b)^2}{4ab}$$

ve

$$\lambda_3 = \frac{1}{a(b-a)} - \frac{3a+b}{(b-a)^3} ln\frac{(a+b)^2}{4ab} = \lambda_1 - \lambda_2$$

şeklinde tanımlıdır (İşcan 2014).

Teorem 1.11. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında harmonik konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+\,f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\le\frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{p}+1}\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}[\mu_1|f'(a)|^q\;+\;\mu_2|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde $q>1$ için geçerlidir ve burada

$$\mu_1=\frac{a^{2-2q}+b^{1-2q}[(b-a)(1-2q)-a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

$$\mu_2=\frac{a^{2-2q}-a^{1-2q}[(b-a)(1-2q)-a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

şeklinde tanımlıdır (İşcan 2014).

2. GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Lemma 2.1. $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $a,b\in I^\circ$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise $n\in N\,,n\ge 1$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$b^nf(b)-a^nf(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx=(lnb-lna)\int_0^1 a^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}f'(a^tb^{1-t})dt$$

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için,

$$\int_0^1 a^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}f'(a^tb^{1-t})dt$$

integralinde,

$$x=a^tb^{1-t}$$

değiken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^1 a^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}f'(a^tb^{1-t})dt=\frac{1}{(lnb-lna)}\int_b^a x^nf'(x)dx$$

$$=\frac{1}{(lnb-lna)}\left[\,b^nf(b)-a^nf(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\,\right]$$

elde edilir. Daha sonra eşitliğin her tarafı $(lnb-lna)$ ile çarpılırsa ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2. $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ f fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $a,b\in I^\circ$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise $n\in N\,,n\ge 1$ iken aşağıdaki eşitlik $\forall\,u\in[a,b]$ için geçerlidir:

$$b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx = (lnu - lna)\int_0^1 u^{(n+1)t}\, a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t})dt$$
$$+ (lnb - lnu)\int_0^1 u^{(n+1)t}\, b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t})dt.$$

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için önce;

$$I_1 = \int_0^1 u^{(n+1)t}\, a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t})dt$$

ve

$$I_2 = \int_0^1 u^{(n+1)t}\, b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t})dt$$

alalım. $x = u^t a^{1-t}$değişken değiştirmesi yapılır ve integral alınırsa;

$$I_1 = \int_0^1 u^{(n+1)t}\, a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t})dt$$
$$= \frac{1}{(lnu - lna)}\left[u^n f(u) - a^n f(a) - n\int_a^u x^{n-1} f(x)dx\right] (1)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_0^1 u^{(n+1)t}\, b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t})dt$$
$$= \frac{1}{(lnu - lnb)}\left[u^n f(u) - b^n f(b) - n\int_b^u x^{n-1} f(x)dx\right] (2)$$

(1) eşitlik $(\ln u - \ln a)$ ile ve (2) eşitlik $(\ln b - \ln u)$ ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GG −konveks ise;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnb - lna) L^{\frac{1}{P}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right) L^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\right)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.1 ve $|f'(x)|^q$ nin GG-konveks olduğu kullanılarak

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\leq (lnb - lna)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt$$
$$\leq (lnb - lna)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)}\, |f'(a)|^t |f'(b)|^{(1-t)} dt$$
$$= (lnb - lna) b^{(n+1)} |f'(b)| \int_0^1 (\frac{a}{b})^{(n+1)t} \left|\frac{f'(a)}{f'(b)}\right|^t dt$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\leq (lnb - lna) b^{(n+1)} |f'(b)| \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left|\frac{f'(a)}{f'(b)}\right|^{tq} dt\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= (lnb - lna) L^{\frac{1}{P}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right) L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GA −konveks ise;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}\left(a^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}\right)(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.1 , $|f'(x)|^q$ in GA −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak:

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$\leq (lnb - lna)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt$$
$$\leq (lnb - lna) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)\, dt\right]$$

$$\leq (lnb - lna)b^{(n+1)}\left[|f'(a)|\left(\int_0^1 t^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + |f'(b)|\left(\int_0^1 (1-t)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(lnb - lna)L^{\frac{1}{q}}\left(a^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}\right)(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$ de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b, n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GG −konveks ise $\forall u \in [a,b]$ için;

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$

$$\leq (lnu - lna)L^{\frac{1}{P}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(a)|^q)$$

$$+ (lnb - lnu)L^{\frac{1}{P}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.2, $|f'(x)|^q$ in GG −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
&\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right| \\
&\qquad \leq (lnu-lna)\int_0^1 u^{(n+1)t}a^{(n+1)(1-t)}|f'(u^t a^{1-t})|dt \\
&\qquad + (lnb-lnu)\int_0^1 u^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}|f'(u^t b^{1-t})|dt \\
&\qquad \leq (lnu-lna)\int_0^1 u^{(n+1)t}a^{(n+1)(1-t)}\,|f'(u)|^t|f'(a)|^{(1-t)}dt \\
&\qquad + (lnb-lnu)\int_0^1 u^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}|f'(u)|^t|f'(b)|^{(1-t)}dt \\
&\qquad = (lnu-lna)a^{(n+1)}|f'(a)|\int_0^1\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t}\left|\frac{f'(u)}{f'(a)}\right|^t dt \\
&\qquad + (lnb-lnu)b^{(n+1)}|f'(b)|\int_0^1\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t}\left|\frac{f'(u)}{f'(b)}\right|^t dt \\
&\qquad \leq (lnu-lna)a^{(n+1)}|f'(a)|\left[\int_0^1\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tp}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left|\frac{f'(u)}{f'(a)}\right|^{tq}dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + (lnb-lnu)b^{(n+1)}|f'(b)|\left[\int_0^1\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tp}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left|\frac{f'(u)}{f'(b)}\right|^{tq}dt\right] \\
&\qquad \leq (lnu-lna)L^{\frac{1}{P}}\left(u^{(n+1)p},a^{(n+1)p}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q,|f'(a)|^q) \\
&\qquad + (lnb-lnu)L^{\frac{1}{P}}\left(u^{(n+1)p},b^{(n+1)p}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q,|f'(b)|^q)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur

Teorem 2.4. $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$, $n\in N$, $n\geq 1$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu $GA-$konveks ise $\forall u\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right| \\
&\qquad \leq\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Big[(lnu-lna)L^{\frac{1}{q}}\left(u^{(n+1)q},a^{(n+1)q}\right)(|f'(u)|,|f'(a)|) \\
&\qquad + (lnb-lnu)L^{\frac{1}{q}}\left(u^{(n+1)q},b^{(n+1)q}\right)(|f'(u)|,|f'(b)|)\Big]
\end{aligned}$$

eşitsizliği $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.2, $|f'(x)|^q$ in $GA-$konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$
$$\leq \left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}a^{(n+1)(1-t)}|f'(u^t a^{1-t})|dt$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}|f'(u^t b^{1-t})|dt$$
$$\leq \left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}a^{(n+1)(1-t)}\,(t|f'(u)|+(1-t)|f'(a)|)dt$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}(t|f'(u)|+(1-t)|f'(b)|)dt$$
$$=\left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)a^{(n+1)}\left[|f'(u)|\int_0^1 t\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t}dt+|f'(a)|\int_0^1(1-t)\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t}dt\right]$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)b^{(n+1)}\left[|f'(u)|\int_0^1 t\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t}dt+|f'(b)|\int_0^1(1-t)\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t}dt\right]$$
$$\leq \left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)a^{(n+1)}\left[|f'(u)|\left(\int_0^1 t^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+|f'(a)|\left(\int_0^1(1-t)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)b^{(n+1)}\left[|f'(u)|\left(\int_0^1 t^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+|f'(b)|\left(\int_0^1(1-t)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tq}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$\leq\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[(lnu-lna)L^{\frac{1}{q}}\left(u^{(n+1)q},a^{(n+1)q}\right).\left(|f'(u)|,|f'(a)|\right)\right.$$
$$\left.+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)L^{\frac{1}{q}}\left(u^{(n+1)q},b^{(n+1)q}\right).\left(|f'(u)|,|f'(b)|\right)\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.5. $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$, $n\in N$, $n\geq 1$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA −konveks ise;

$$\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$
$$\leq(lnb-lna)\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}L^{\frac{1}{p}}\left(a^{(n+1)p},b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)}-|f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)|-|f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.1 , $|f'(x)|^q$ in GA −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx \right|$$
$$\leq \left(\ln \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt$$
$$\leq \left(\ln \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)dt\right]$$
$$\leq \left(\ln \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right) b^{(n+1)} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Eğer burada

$t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|$= u değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx \right|$$
$$\leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}\left(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.6. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b, n \in N$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer$[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$fonksiyonu GA −konveks ise $\forall u \in [a,b]$ için

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx \right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\ln \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right) L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(a)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}} \right.$$
$$\left. + \left(\ln \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right) L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.2 , $|f'(x)|^q$ in GA −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$
$$\leq (\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}})\int_0^1 u^{(n+1)t}a^{(n+1)(1-t)}|f'(u^t a^{1-t})|dt$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)\int_0^1 u^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}|f'(u^t b^{1-t})|dt\,u$$
$$\leq (\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}})a^{(n+1)}\left[\int_0^1\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t}(t|f'(u)|+(1-t)|f'(a)|)dt\right]$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)b^{(n+1)}\left[\int_0^1\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t}(t|f'(u)|+(1-t)|f'(b)|)dt\right]$$
$$\leq (\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}})a^{(n+1)}\left(\int_0^1\left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tp}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(t|f'(u)|+(1-t)|f'(a)|)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)b^{(n+1)}\left(\int_0^1\left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tp}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(t|f'(u)|+(1-t)|f'(b)|)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Eğer burada

$t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|$= u değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$
$$\leq\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p},a^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)}-|f'(a)|^{(q+1)}}{|f'(u)|-|f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p},b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)}-|f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(u)|-|f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.7. $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$, $n\in N$, $n\geq 1$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GH −konveks ise;

$$\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$

$$\leq\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)\left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}}|f'(a)||f'(b)|L^{\frac{1}{p}}\left(a^{(n+1)p},b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{(-q+1)}-|f'(b)|^{(-q+1)}}{|f'(a)|-|f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.1 , $|f'(x)|^q$ in GH −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$

$$=\left(\ln\frac{b}{a}\right)\int_0^1 a^{(n+1)t}b^{(n+1)(1-t)}|f'(a^t b^{1-t})|dt$$
$$\leq\left(\ln\frac{b}{a}\right)b^{(n+1)}\left[\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t}\left(\frac{|f'(a)||f'(b)|}{t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|}\right)dt\right]$$
$$\leq\left(\ln\frac{b}{a}\right)b^{(n+1)}|f'(a)||f'(b)|\left[\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tp}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left(\frac{1}{t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|}\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$=\left(\ln\frac{b}{a}\right)\left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}}|f'(a)||f'(b)|L^{\frac{1}{p}}\left(a^{(n+1)p},b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{(-q+1)}-|f'(b)|^{(-q+1)}}{|f'(a)|-|f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ispat tamamlanmış olur

Teorem 2.8. $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b, n\in N$, $n\geq 1$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GH −konveks ise $\forall u\in[a,b]$ için;

$$\left|b^n f(b)-a^n f(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)dx\right|$$
$$\leq\left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left|f'(u)\right|\left[\left|f'(a)\right|\left(\ln\frac{u}{a}\right)L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p},a^{(n+1)p}\right)\left(\frac{\left|f'(u)\right|^{(-q+1)}-\left|f'(a)\right|^{(-q+1)}}{\left|f'(u)\right|-\left|f'(a)\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left|f'(b)\right|\left(\ln\frac{b}{u}\right)L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p},b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{\left|f'(u)\right|^{(-q+1)}-\left|f'(b)\right|^{(-q+1)}}{\left|f'(u)\right|-\left|f'(b)\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 2.2 $|f'(x)|^q$ in GH −konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)dx\right|$$
$$= (lnu - lna)\int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} \left|f^{'}(u^t a^{1-t})\right| dt$$
$$+ (lnb - lnu)\int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} \left|f^{'}\left(u^t b^{1-t}\right)\right| dt$$
$$\leq (lnu - lna)a^{(n+1)}\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t}\left(\frac{\left|f^{'}(u)\right|\left|f^{'}(a)\right|}{t\left|f^{'}(u)\right| + (1-t)\left|f^{'}(a)\right|}\right)dt\right]$$
$$+ (lnb - lnu)b^{(n+1)}\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t}\left(\frac{\left|f^{'}(u)\right|\left|f^{'}(b)\right|}{t\left|f^{'}(u)\right| + (1-t)\left|f^{'}(b)\right|}\right)dt\right]$$
$$\leq (lnu - lna)a^{(n+1)}\left|f^{'}(u)\right|\left|f^{'}(a)\right|\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t\left|f^{'}(u)\right| + (1-t)\left|f^{'}(a)\right|}\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$+ (lnb - lnu)b^{(n+1)}\left|f^{'}(u)\right|\left|f^{'}(b)\right|\left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tp} dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t\left|f^{'}(u)\right| + (1-t)\left|f^{'}(b)\right|}\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left|f^{'}(u)\right|\left[\left(\ln\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)\left|f^{'}(a)\right| L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}\right)\left(\frac{\left|f^{'}(u)\right|^{(-q+1)} - \left|f^{'}(a)\right|^{(-q+1)}}{\left|f^{'}(u)\right| - \left|f^{'}(a)\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\ln\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{u}}\right)\left|f^{'}(b)\right| L^{\frac{1}{p}}\left(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}\right)\left(\frac{\left|f^{'}(u)\right|^{(-q+1)} - \left|f^{'}(b)\right|^{(-q+1)}}{\left|f^{'}(u)\right| - \left|f^{'}(b)\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

ispat tamamlanmış olur.

3. ELDE EDİLEN BULGULARA DAİR BAZI SONUÇ VE UYGULAMAR

Sonuç 3.1. Teorem 2.1 de n=1 seçilirse

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq (lnb - lna)L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p})L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 3.2. Teorem 2.2 de n=1 seçilirse

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^{2q}, b^{2q})(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 3.3. Teorem 2.5 de n=1 seçilirse

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p})\left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 3.4. Teorem 2.7 de n=1 seçilirse

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}} |f'(a)||f'(b)|L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p})\left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Uygulama 3.1. $a, b \in \mathbb{R}^+$ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$|e^b(b-1) - e^a(a-1)| \leq (lnb - lna)L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p})L^{\frac{1}{q}}(e^{aq}, e^{bq})$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 3.1 de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ $GG - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

Uygulama 3.2. $a, b \in \mathbb{R}^+$ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\left|\log\left[(e^{a-b})\left(\frac{b+1}{a+1}\right)\right]\right| \leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^{2q}, b^{2q})\left(\left|\frac{1}{a+1}\right| + \left|\frac{1}{b+1}\right|\right)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 3.2 de $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x+1)$ $GA - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç

elde edilir.

Uygulama 3.3. $a, b \in \mathbb{R}^+$ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\left|\log\left[\left(e^{a-b}\right)\left(\frac{b+1}{a+1}\right)\right]\right| \leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}\left(a^{2p}, b^{2p}\right)\left(\frac{\left|\frac{1}{a+1}\right|^{(q+1)} - \left|\frac{1}{b+1}\right|^{(q+1)}}{\left|\frac{1}{a+1}\right| - \left|\frac{1}{b+1}\right|}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 3.3 de $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x+1)$ $GA - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir

Uygulama 3.4. $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{2}{3}\left(b^3 - a^3\right) \leq (lnb - lna)\left(\frac{1}{-q+1}\right)^{\frac{1}{q}} 2abL^{\frac{1}{p}}\left(a^{2p}, b^{2p}\right)\left(\frac{a^{(-q+1)} - b^{(-q+1)}}{a-b}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 3.4 te $f: (-\infty, 0) \to (0, \infty)$ ve $f(\ x) = x^2$ $GH - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

KAYNAKÇA

M. Avcı-Ardıç, A.O.Akdemir, E.Set, New Ostrowski Like Inequalities for GG−Convex and GA−Convex Functions, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 19, Number 4 (2016), 1159–1168.

G.D. Anderson , M.K. Vamanamurthy , M. Vuorinen , Generalized convexity and inequalities J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294–1308.

İ. İşcan, Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 43 (6) (2014), 935-942.

T-Y. Zhang, A-P. Ji and F. Qi, Sone inequalities of Hermite-Hadamard type for GA-convex functions with applications to means, Le Matematiche, Vol. LXVIII (2013) Fasc. I, pp. 229239, doi: 10.4418/2013.68.1.17.

X-M. Zhang, Y-M. Chu, and X-H. Zhang, The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2010, Article ID 507560, 11 pages, doi:10.1155/2010/507560.